Resoluções

Capítulo 1

Progressão aritmética I

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 5

01 a) $a_1 = 0$

$a_2 = 5a_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$a_3 = 5a_2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \qquad \left(0, \frac{1}{2}, 3, \frac{31}{2} \ldots\right)$

$a_4 = 5a_3 + \frac{1}{2} = 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} = 15 + \frac{1}{2} = \frac{31}{2}$

b) $a_1 = 3 \cdot (-2)^1 = -6$

$a_2 = 3 \cdot 2 \cdot (-2)^2 = 24$

$a_3 = 3 \cdot 3 \cdot (-2)^3 = -72 \qquad (-6, 24, -72, 192\ldots)$

$a_4 = 3 \cdot 4 \cdot (-2)^4 = 192$

c) $k_1 = 1^3 = 1 \qquad k_5 = 5^3 = 125$

$k_2 = 2^3 = 8 \qquad k_6 = 6^3 = 216$

$k_3 = 3^3 = 27 \qquad k_7 = 7^3 = 343$

$k_4 = 4^3 = 64 \qquad (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343)$

d) $d_1 = 4$

$d_2 = (-1)^2 \cdot 4 = 4$

$d_3 = (-1)^3 \cdot 4 = -4$

$d_4 = (-1)^4 \cdot (-4) = -4$

$(4, 4, -4, -4)$

02 a) $a_n = 3n, n \in \mathbb{N}^*$

b) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$

03 Pela condição dada, tem-se o seguinte:

$S_n = n(n + 2)$

Para n = 1, tem-se:

$S_1 = 1 \cdot (1 + 2) = 3$

$a_1 = 3$

Para n = 2, tem-se:

$S_2 = 2 \cdot (2 + 2) = 2 \cdot 4 = 8$

$a_1 + a_2 = 8$

$3 + a_2 = 8 \therefore a_2 = 5$

Para n = 3, tem-se:

$S_3 = 3 \cdot (3 + 2) = 3 \cdot 5 = 15$

$a_1 + a_2 + a_3 = 15$

$3 + 5 + a_3 = 15 \therefore a_3 = 7$

Para n = 4, tem-se:

$S_4 = 4 \cdot (4 + 2) = 24$

$S_3 + a_4 = 24$

$15 + a_4 = 24 \therefore a_4 = 9$

Para n = 5, tem-se:

$S_5 = 5 \cdot (5 + 2) = 35$

$S_4 + a_5 = 35$

$24 + a_5 = 35 \therefore a_5 = 11$

$(3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$

$a_n = 2n + 1$

04 Pela condição dada, tem-se o seguinte:

$P_n = 3^{n^2}$

Para n = 1, tem-se:

$P_1 = 3^{1^2} = 3^1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$

Para n = 2, tem-se:

$P_2 = 3^{2^2} = 3^4 = 81 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = 81$

$3 \cdot a_2 = 81 \Rightarrow a_2 = \frac{81}{3} = 27$

Para n = 3, tem-se:

$P_3 = 3^{3^2} = 3^9$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 3^9$

$3 \cdot 27 \cdot a_3 = 3^9$

$81 \cdot a_3 = 3^9$

$3^4 \cdot a_3 = 3^9$

$a_3 = \frac{3^9}{3^4} = 3^5 = 243$

Observe que a sequência formada é

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10})$

$(3, 27, 243,\ldots)$

$3^1, 3^3, 3^5$

Perceba que o termo geral é dado por

$a_n = 3^{2n-1}$

Logo,

$a_{10} = 3^{19}$

05 **A**

(7, 4, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

$a_3 = |7 - 4| = 3$

$a_4 = |4 - 3| = 1$

$a_5 = |3 - 1| = 2$

$a_6 = |2 - 1| = 1$

$a_7 = |2 - 1| = 1$

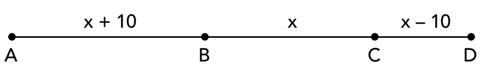
$a_8 = |1 - 1| = 0$

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 11

01 a) $2x - 1 - x - 3 = x + 5 - 2x + 1$
$x - 4 = -x + 6 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$
Logo, a razão é 1.

b) $a = x - r,\ b = x,\ c = x + r$
$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 27 \Rightarrow x = 9$
$x - r = 2(x + r) + 3 \Rightarrow 9 - r = 18 + 2r + 3 \Rightarrow 3r = -12 \Rightarrow r = -4$
$a = 9 - (-4) = 13$
$b = 9$
$c = 9 - 4 = 5$ R: (13, 9, 5)

02 **A**



$$x + 10 + x + x - 10 = 390$$
$$3x = 390$$
$$x = 130$$

A P.A., então, será determinada por (140, 130, 120, ...).
E seu vigésimo termo será dado por
$a_{20} = 140 + 19 \cdot (-10) = -50.$

03 **E**
Tem-se o seguinte:
$a_{17} = a_1 + 16r$
$47 = a_1 + 16 \cdot 2{,}75$
$47 = a_1 + 44$
$\therefore a_1 = 3$

04 **C**
Sabendo-se que o enésimo termo da P.A. se dá da forma $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, tem-se o seguinte:
$45 = 89 + 11r$
$-44 = 11r$
$\therefore r = -4$
Da mesma forma:
$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot r$
$a_8 = 89 + 7 \cdot r$
Como $r = -4$:
$a_8 = 89 + 7 \cdot (-4)$
$\therefore a_8 = 61$

05 **B**
Considere que $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{20})$ representam as vinte primeiras prestações do empréstimo.
$a_2 = a_1 + r$
$a_{19} = a_1 + 18r$

Depois de isolar e igualar a_1, tem-se

$$a_{19} = a_2 + 17 \cdot r$$
$$400 = 3800 + 17r$$
$$17r = -3400$$
$$r = -200$$

Portanto, a razão da P.A. é –200.

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 $x - \cancel{2r} + x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} + x + \cancel{2r} = 40 \Rightarrow x = 8$
$\dfrac{1}{x - 2r} + \dfrac{1}{x + 2r} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow r = \pm 2$

Os números são 4, 6, 8, 10 e 12.

02 (figura 1, figura 2, figura 3, ..., figura 20)
$(3, 6, 9, ..., a_{20})$
Como r = 3, então:
$a_{20} = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 3$
$a_{20} = 3 + 57 = 60$
Resposta: 60 pontos.

03 **B**
Considerando a P.A. na ordem dada, tem-se:
P.A. $(5x - 5, x + 14, 6x - 3)$
Utilizando a propriedade de uma P.A., tem-se:
$$x + 14 = \frac{5x - 5 + 6x - 3}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + 28 = 11x - 8 \Rightarrow -9x = -36 \Rightarrow x = 4$$
Logo, a P.A. será (15, 18, 21).
Portanto, a soma do três números será
$a_1 + a_2 + a_3 = 15 + 18 + 21 = 54.$

04 **A**
Tem-se o seguinte:
I. $a_5 = a_2 + 3r \Rightarrow 400 = 250 + 3r \Rightarrow r = 50$
II. $a_2 = a_1 + r \Rightarrow 250 = a_1 + 50 \Rightarrow a_1 = 200$

05 **D**

I. Razão = (t + 6) – t = t^2 – (t + 6) ⇒ $t^2 - t - 12 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 \quad \text{(não convém)} \\ \text{ou} \\ t = 4 \end{cases}$$

II. As partes **x**, **y** e **z** são tais que

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{t+6} = \frac{z}{t^2} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{10} = \frac{z}{16} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = 10k \\ z = 16k \end{cases}$$

Então,

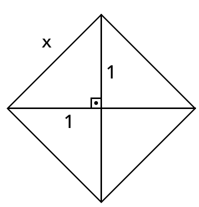
$$4k + 10k + 16k = 60 \text{ min} \Rightarrow k = 2 \text{ min} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ min} \\ y = 20 \text{ min} \\ z = 32 \text{ min} \end{cases}$$

06 **C**

Seja **n** a distância, em quilômetros, pedalada pelo ciclista no primeiro dia. Dado que o ciclista pedala, cada dia, 10 km a mais do que pedalou no dia anterior, vem

$$n + n + 10 + n + 20 + n + 30 + n + 40 = 310 \Rightarrow 5n = 210$$
$$\Rightarrow n = 42 \text{ km}$$

07 **D**



O lado do quadrado da figura 1= x.

Portanto:

$x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ cm

Os lados dos quadrados formam uma P.A. de razão $r = \sqrt{2}$.

Logo, o lado do vigésimo quadrado é $20\sqrt{2}$ cm.

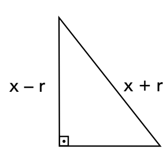
Sua área, então, será dada por: $A = (20\sqrt{2})^2 = 800 \text{ cm}^2$.

08 **C**

I. $x + \cancel{r} + x + x - \cancel{r} = 6{,}0$

$3x = 6{,}0$

$x = 2{,}00$

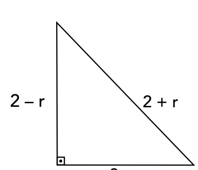


II. $(2 + r)^2 = 2^2 + (2 - r)^2$

$\cancel{4} + 4r + \cancel{r^2} = \cancel{4} + 4 - 4r + \cancel{r^2}$

$8r = 4$

$r = 0{,}5$



III. $S = \dfrac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{2}$

$S = \dfrac{\cancel{2} \cdot (2 - 0{,}5)}{\cancel{2}}$

$S = 1{,}5 \text{ m}^2$

09 **C**

Em 2012: $a_1 = 17{,}3$

Em 2030: $a_{19} = 23{,}6$

Considerando a P.A., tem-se:

$a_{19} = a_1 + 18 \cdot r$

$23{,}6 = 17{,}3 + 18 \cdot r$

$18 \cdot r = 6{,}3$

$r = 0{,}35$

Portanto, o oitavo termo dessa sequência é

$a_8 = a_1 + 7 \cdot r$

$a_8 = 17{,}3 + 7 \cdot 0{,}35$

$a_8 = 19{,}75$

10 a) Se a progressão $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ é harmônica, então a sequência $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética de razão $\frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}$.

Daí, seu sexto termo é dado por

$$a_6 = \frac{5}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

Em consequência, o resultado pedido é $\frac{4}{5}$.

b) Sabendo que em toda progressão aritmética cada termo é igual à média aritmética do seu antecessor e do seu sucessor (exceto o primeiro e o último), tem-se:

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{a + c}{ac}$$
$$\Rightarrow b = \frac{2ac}{a + c}$$