Módulo 6

Função quadrática II; Tabelas e gráficos

Atividades para sala

01 **B**

Seja **x** o valor em reais do desconto.

- Novo preço por unidade: 40 – x
- Novo número de unidades vendidas: 200 + 10x
- Novo faturamento: (40 – x) · (200 + 10x)

$f(x) = (40 - x) \cdot (200 + 10x)$

$f(x) = 8\,000 + 400x - 200x - 10x^2$

$f(x) = -10x^2 + 200x + 8\,000$

O faturamento será máximo quando o **x** for máximo.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2\cdot(-10)} = \frac{-200}{-20} = 10 \text{ reais.}$$

02 **B**

Seja a função $h - 120 + 5t^2 = 0$, isolando o **h**:

$h = -5t^2 + 120\,t$.

I. O tempo para alcançar a altura máxima é t_v.

II. Altura máxima h_v.

Logo, $t_v = \dfrac{-120}{2(-5)} = \dfrac{120}{10} = 12$ seg e $hv = -5 \cdot 12^2 + 120 \cdot 12$

$hv = 1\,440 - 720$

$hv = 720$ m.

03 **D**

Como o coeficiente do termo de segundo grau é positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima.

Logo, seu conjunto imagem é $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$.

$f(x) = -4 - 3x + x^2$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-4) \Rightarrow 9 + 16 = 25.$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-25}{4\cdot 1} = \frac{-25}{4}$$

Logo, $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\dfrac{25}{4}\right\}$.

04 **C**

Pelo enunciado dado, tem-se:

$$\frac{x^2 + x - 1}{9 - x^2} \geq \frac{1}{3 - x}$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{9 - x^2} - \frac{1}{3 - x} \geq 0$$

$$\frac{x^2 + x - 1 - (3 + x)}{9 - x^2} \geq 0$$

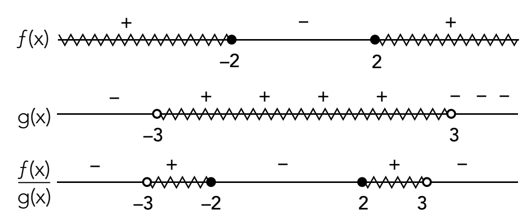
$$\frac{x^2 \cancel{+x} - 1 - 3 \cancel{-x}}{9 - x^2} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{9 - x^2} \geq 0$$

Resolvendo as funções, têm-se:

$f(x) = x^2 - 4 \therefore x^2 - 4 = 0 \therefore x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$ (I)

$g(x) = 9 - x^2 \therefore 9 - x^2 = 0 \therefore x^2 = 9 \therefore x = \pm 3$ (II)



$]-3, -2] \cup [2, 3[$

05 **E**

a) (F) O lucro (R – C) é nulo também quando a quantidade produzida e vendida é 10.

b) (F) Há prejuízo também para quantidades superiores a 30.

c) (F) Para a quantidade 50, o prejuízo é maior que 400.

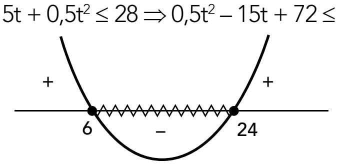
d) (F) O lucro é inferior a 200.

e) (V) O lucro será positivo (R – C > 0) para quantidades entre 10 e 30.

06 **B**

É pedido $P(t) \leq 28$.

$100 - 15t + 0{,}5t^2 \leq 28 \Rightarrow 0{,}5t^2 - 15t + 72 \leq 0 \Rightarrow t^2 - 30t + 144 \leq 0$



$\Rightarrow 6 \leq t \leq 24$

Portanto, para se obter uma cultura segura, ela deve ficar, no mínimo, 6 segundos exposta à radiação.

07 **A**

De 2013 a 2015, foram criados 731 000 + 153 000 + 115 000 = = 999 000 empregos. Como 800 000 jovens entram por ano no mercado de trabalho, tem-se que, de 2013 a 2016, entrarão 4 · 800 000 = 3 200 000. Para atender a todos os jovens em 2016, devem ser criados 3 200 000 – 999 000 = 2 201 000 empregos.

08 **D**

Observe que 4 anos correspondem a 48 meses. Assim, de acordo com a tabela, Botafogo, Atlético-MG, Portuguesa, Guarani, Ponte Preta, Fluminense e Vasco da Gama levarão mais de 48 meses para pagarem suas dívidas.

09 **E**

O cálculo do IMC para cada um dos amigos é

$$IMC_{Alan} = \frac{45}{(1,50)^2} = 20 \text{ kg/m}^2 \therefore \text{Peso normal;}$$

$$IMC_{Bruno} = \frac{32}{(1,60)^2} = 12,5 \text{ kg/m}^2 \therefore \text{Muito abaixo do peso;}$$

$$IMC_{Caio} = \frac{128}{(1,60)^2} = 50 \text{ kg/m}^2 \therefore \text{Obesidade III (mórbida).}$$

Atividades propostas

01 **B**

Considerando **x** o número de moedas douradas coletadas, a pontuação seria dada por:

$$P(x) = x - \frac{x}{100} \cdot x \Rightarrow P(x) = -\frac{x^2}{100} + x$$

Logo, o valor máximo de P(x) será dado por:

$$P_{máximo} = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = -\frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{100}\right)} = 25.$$

Portanto, o limite de pontos que um competidor poderá alcançar nesta prova é 25.

02 **D**

$$T(t) = 39 \Rightarrow \frac{-t^2}{4} + 400 = 39 \Rightarrow \frac{-t^2}{4} = -361 \Rightarrow t^2 = 1\,444 \Rightarrow$$
$$t = 38 \text{ min}$$

03 **B**

Para descobrir o preço de equilíbrio de mercado do minério de ferro, basta igualar as duas funções. Assim:

$2x^2 + 5x = -15x + 238 \Leftrightarrow 2x^2 + 20x - 238 = 0$

$x^2 + 10x - 119 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-10 \pm 24}{2} \Rightarrow$

$x_1 = 7$ (valor positivo; por isso convém)

$x_2 = -17$ (valor negativo; por isso não convém)

O preço de equilíbrio de mercado é, então:

$p = 2 \cdot (7)^2 + 5 \cdot 7 = 98 + 35 = 133$

04 **D**

Primeira resolução:

$T(h) = -h^2 + 22h - 85$

$$T_{máx.} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{-4} = 36 \text{ °C}$$

Segunda resolução:

Escrevendo a lei de T na forma canônica:

$T(h) = -h^2 + 22h - 85 \Rightarrow$

$-(h^2 - 22h + 85) \Rightarrow$

$-[(h - 11)^2 - 36] \Rightarrow$

$36 - (h - 11)^2$

Assim, a temperatura máxima é 36 °C ocorrendo às 11 horas. Tal temperatura, segundo a tabela, é classificada como alta.

05 **D**

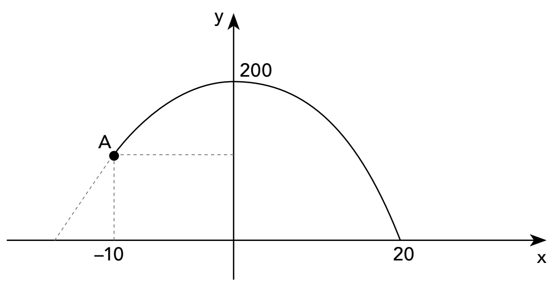
Fatos que ajudam a resolução:

I. Suponha que a trajetória do projétil seja uma parábola de uma função quadrática;

II. Considere eixo de simetria = eixo das coordenadas;

III. Considere que o eixo das abscissas representa o solo.

Graficamente:



O vértice da parábola é o ponto (0, 200). Como o ponto P percorre 10 m até atingir a abscissa do vértice, o ponto A, que indica a beira do penhasco, tem abscissa –10.

Uma das raízes da função $f(x)$ que dá origem à parábola é $x = 20$ $(-10 + 30 = 20)$. Por simetria, a outra raiz vale –20. Assim $f(x) = a(x - 20)(x + 20) \Rightarrow f(x) = a(x^2 - 400)$. Como $f(0) = 200$, então: $a \cdot (0 - 400) = 200 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$. Logo, a altura do penhasco será $f(-10) = -\frac{1}{2}\,((-10)^2 - 400) \therefore 150$ m.

06 **A**

I. Seja $f(x)$ uma função de grau no máximo 2. Assim, $y = ax^2 + bx + c$.

II. Para os diferentes valores de notas, tem-se:

- Se $x = 0$ e $y = 0$, então:
  $a(0)^2 + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$
- Se $x = 10$ e $y = 10$, então:
  $a(10)^2 + b(10) + 0 = 10 \Rightarrow 100a + 10b = 10\ (:10) \Rightarrow$
  $10a + b = 1$
- Se $x = 5$ e $y = 6$, então:
  $a(5)^2 + b(5) + 0 = 6 \Rightarrow 25a + 5b = 6$

Resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} 10a + b = 1 \ (\cdot -5) \\ 25a + 5b = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -50a - 5b = -5 \\ 25a + 5b = 6 \end{cases}$$

$$-25a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{25}$$

Substituindo $a = -\frac{1}{25}$ na equação $25a + 5b = 6$

$$25\left(-\frac{1}{25}\right) + 5b = 6 \Rightarrow b = \frac{7}{5}$$

Logo, a expressão da função a ser utilizada pelo professor é $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$.

07 **A**

$0,5x + y = 120$ (demanda) $\Rightarrow y = -0,5x + 120$

$R = x \cdot y$ (receita)

$C = 1\,150$ (custo)

$L = R - C$

$L = x(-0,5x + 120) - 1\,150$

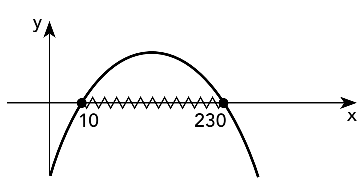
$L = -0,5x^2 + 120x - 1\,150$

Resolvendo a equação:

$-0,5x^2 + 120x - 1\,150 = 0$

$x = 230$ ou $x = 10$

Fazendo o gráfico de L:



Assim, pode-se observar que o proprietário não tem prejuízo no intervalo $[10, 230] \Rightarrow b - a = 220$.

08 **E**

Independentemente do número real escolhido por qualquer pessoa, sempre seu quadrado será um real positivo ou nulo. Portanto, a expressão final que será calculada sempre é $x^2 - 1$, que só será negativa se **x** for zero e será nula se **x** for ±1. Como nenhum deles escolheu esses valores, então o resultado de todos é positivo.

09 **D**

Seja **p** o preço unitário dos produtos, sem desconto. De acordo com o enunciado, o valor V a ser pago pela aquisição de **n** produtos, com $0 \le n \le 60$, é dado pela função:

$$V(n) = (100 - n)\% \cdot n \cdot p = \frac{-p}{100} \cdot (n^2 - 100\,n)$$

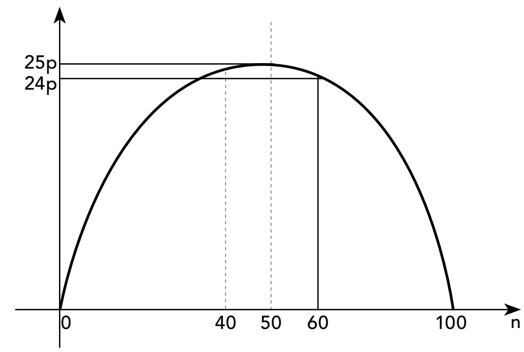
$$V(n) = \frac{-p}{100} \cdot (n^2 - 100\,n)$$

Para $V(n) = 0 \Rightarrow \frac{-p}{100} \cdot (n^2 - 100\,n) = 0 \Rightarrow \frac{-p}{100} = 0 \Rightarrow p = 0$

ou $n^2 - 100n = 0 \Rightarrow n(n - 100) = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $n - 100 = 0$

$n = 100$

Como a função V é quadrática, e o eixo de simetria de seu gráfico é a reta $n = 50$, têm-se:



Para $n = 50 \Rightarrow V(50) = \frac{-p}{100} \cdot (50^2 - 100 \cdot 50) = 25p$

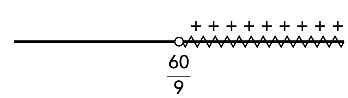
Para $n = 60 \Rightarrow V(60) = \frac{-p}{100} \cdot (60^2 - 100 \cdot 60) = 24p$

$V(60) = V(40)$, pois possuem a mesma imagem. Assim como $V(59) = V(41)$; $V(58) = V(42)$ e assim por diante. Dessa forma, o intervalo [40, 49] terá a mesma imagem do desconto do intervalo [51, 60].

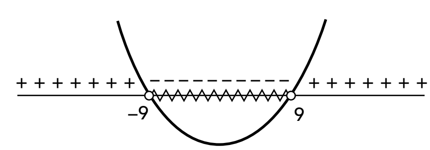
10 **B**

I. $7(m - 2) < 16m - 74$
$7m - 14 < 16m - 74$
$7m - 16m < 14 - 74$
$-9m < -60$

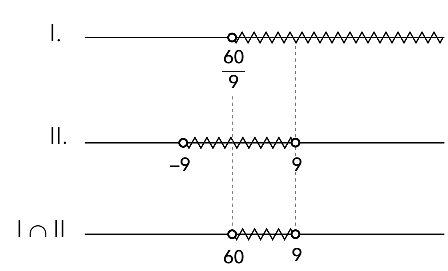
$$m > \frac{60}{9} \sim 6,66...$$



II. $m^2 - 81 < 0$
$m^2 - 81 = 0$
$m = \pm 9$



Fazendo $I \cap II$:



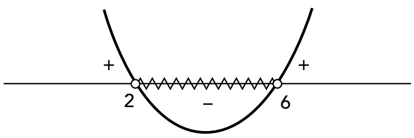
$$\frac{60}{9} < m < 9$$

O único valor entre as opções é o da alternativa B, 8 200 000.

11 **C**

$f(x) < g(x) \Rightarrow x^2 - 6x < 2x - 12 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 < 0$

Estudando o sinal de $x^2 - 8x + 12$:

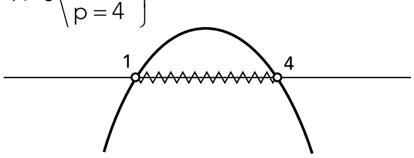


O produto dos valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade $f(x) < g(x)$ é $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

12 **E**

$L = -p^2 + 5p - 3 > 1$

$-p^2 + 5p - 4 > 0 \left\langle \begin{matrix} p = 1 \\ p = 4 \end{matrix} \right\}$ Raízes



Logo, $1 < p < 4$.

13 **A**

Preços indicados em 12 de novembro: frango - R$ 2,70 kg; suíno - $\frac{100,40}{15} = 6,69$ kg; bovino - $\frac{145}{15} = 9,66$ kg;

- Relação suíno/frango = $\frac{6,69}{2,70} = 2,47$, o que caracteriza que o quilograma suíno é maior que o de frango em $2,47 - 1 = 1,47 = 147\%$.
- Relação bovino/suíno = $\frac{9,96}{6,69} = 1,44$, o que caracteriza que o quilograma bovino é maior que o suíno em $1,44 - 1 = 0,44 = 44\%$.
- Relação bovino/frango = $\frac{9,96}{2,70} = 3,68$, o que caracteriza que o quilograma bovino é maior que o de frango em $3,68 - 1 = 2,68 = 268\%$.

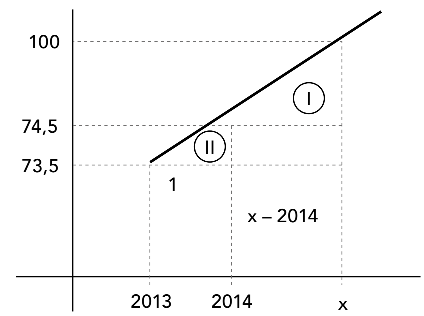
14 **C**

Ficaram acima da inflação o período de fevereiro de 2013 a junho de 2013 e o mês de maio de 2014, assim, totalizando 6 meses em que a inflação ultrapassou a meta de 6,5% apontada no gráfico.

15 **B**

Analisando a tabela, a concentração de hemácias está dentro do intervalo aceitável de referência, embora esteja um pouco acima do limite inferior do intervalo. Já a quantidade de leucócitos está um pouco acima do teto máximo de referência aceitável. Em relação às plaquetas, vê-se que também estão dentro do intervalo de referência.

16 **A**



$\frac{x - 2014}{1} = \frac{25,5}{1} \Rightarrow x = 2\,039,5$. Assim, em 2039 ocorrerá a equivalência dos salários.

17 **A**

Os países desenvolvidos estão, segundo o mapa de valores atuais, na ordem de 12 bilhões de toneladas/ano de CO_2. De acordo com o texto, "[...] é preciso reduzir as emissões globais de 40% a 70% antes de 2050". Assim, com uma redução de 40% a 70% das emissões de carbono, obtêm-se:

- Redução de 70%: $12 \cdot (1 - 0,7) = 12 \cdot 0,3 = 3,6$
- Redução de 40%: $12 \cdot (1 - 0,4) = 12 \cdot 0,6 = 7,2$

Portanto, para atingir a meta em 2050, os países desenvolvidos deverão emitir entre 3,6 e 7,2 bilhões de toneladas/ano de CO_2.

18 **A**

09/05/14: Relação etanol/gasolina = 2,05/2,92 = 0,70 = 70%.
11/07/14: Relação etanol/gasolina = 1,89/2,89 = 0,65 = 65%.
30/01/15: Relação etanol/gasolina = 1,99/2,91 = 0,68 = 68%.
11/09/15: Relação etanol/gasolina = 1,92/3,11 = 0,61 = 61%.
06/11/15: Relação etanol/gasolina = 2,37/3,40 = 0,69 = 69%.