Resoluções

Capítulo 8

Multiplicação de matrizes

ATIVIDADES PARA SALA

01 **B**

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}$$

02 **E**

$$X=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 5\\5 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5 & 5\\5 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 5\\5 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}=-3\cdot I$$

03 **B**

Cálculo do valor de **x**, tal que AB = BA:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\x & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\x & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -16 & 0\\3x & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -16 & 0\\x & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Para que a igualdade seja verdadeira, é preciso ter:
$3x = x \Rightarrow x = 0$.

04

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\11 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a+11b=1\\a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+11b=1\\-3a-12b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}3c+11d=0\\c+4d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3c+11d=0\\-3c-12d=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-11\\d=3\end{cases}$$

Portanto, $|a| + |b| + |c| + |d| = |4| + |-1| + |-11| + |3| = 19$.

05 **E**

Multiplicando as matrizes Q e C, tem-se:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\50\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 10+1\cdot 50+1\cdot 30\\1\cdot 10+2\cdot 50+0\cdot 30\\2\cdot 10+0\cdot 50+2\cdot 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\110\\80\end{pmatrix}$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 **B**

Cálculo de A · 2B:

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-2\\6\end{bmatrix}$$

02 **B**

Cálculo da matriz peça-versão:
matriz peça-versão = (matriz peça-carro) · (matriz carro-versão).

$$\text{m.p.v.}=\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 5\\6 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\text{m.p.v.}=\begin{bmatrix}17 & 22 & 27\\21 & 22 & 34\\18 & 28 & 28\end{bmatrix}$$

03 **C**

$$X=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & 1+0\\0+2 & 0+0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$$

04 **D**

Se B^t é a matriz transposta de B, então $B^t=\begin{pmatrix}5 & 1\\0 & -2\\-3 & 6\end{pmatrix}$.

Portanto, $A\cdot B^t$ é

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\4 & -3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\0 & -2\\-3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+0-6 & 1-2+12\\20+0+0 & 4+6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 11\\20 & 10\end{pmatrix}.$$

05 **D**

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

06 **A**

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \right)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 11 \\ 5 \cdot 1 + 11 \cdot 5 & 5 \cdot 0 + 11 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$$

07 Para as matrizes A e B serem comutativas, é preciso que $A \cdot B = B \cdot A$. Então, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & x \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2x - 12 \\ 4 & x + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + x & -12 + 4x \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Para a igualdade ser verdadeira, deve-se ter:

$8 = 8 + x$

$2x - 12 = -12 + 4x$

$x + 16 = 16$

Conclui-se, assim, que $x = 0$.

08 **C**

Considere L a matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Então, $L = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 + 16 \\ 45 + 24 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 76 \\ 69 \end{pmatrix}$.

09 **A**

Fazendo o produto da matriz referente ao nutriente 2 pela matriz dos percentuais de mistura, tem-se:

$$(340 \quad 520 \quad 305 \quad 485) \cdot \begin{pmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{pmatrix} =$$

$= 340 \cdot 0{,}35 + 520 \cdot 0{,}25 + 305 \cdot 0{,}30 + 485 \cdot 0{,}10 =$

$= 389$ mg.

10 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \text{sen } 2\pi & \cos \pi \\ \cos(-\pi) & \text{sen } 4\pi \end{pmatrix}$

Sabendo que

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1

e que $\cos(-\pi) = \cos \pi$ e $\text{sen } 4\pi = \text{sen } 2\pi$, tem-se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, fazendo o cálculo da inversa da matriz A, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 0, b = -1, c = -1, d = 0$.

Assim, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.