

Resoluções

Capítulo 1

Geometria de posição

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 14

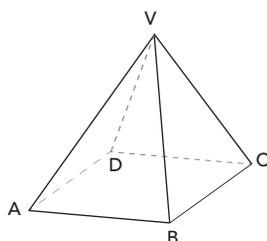
- 01** a) Postulado, pois os postulados são constatações que não necessitam ser comprovadas para que sejam consideradas verdadeiras.
 b) Ponto, reta e plano.
 c) Teoremas.

- 02** **c**
 Como o prolongamento é infinito nos dois sentidos e em duas dimensões (comprimento e largura), tem-se a ideia de plano, elemento geométrico infinito com duas dimensões.

- 03** a) Infinitas.
 b) Três retas.
 c) Infinitos.
 d) PL(VBC), PL(VAC) e PL(VAB).

- 04** a) PL(ABC) e PL(ABG) (dois planos).
 Note que $PL(ABC) = PL(ABCD)$ e $PL(ABG) = PL(ABGH)$.
 b) São 8 vértices ("cantos") e cada vértice pode ser ligado aos outros 7 vértices, determinando 7 retas. Logo, o total de retas seria $8 \cdot 7 = 56$. Porém, cada reta está sendo contada duas vezes. Por exemplo, \overline{AB} é igual a \overline{BA} . Logo, tem-se $56 : 2 = 28$ retas.

- 05** Determinam sete planos.
 Além dos planos das 5 faces, tem-se os planos que contêm as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} da base, juntamente com o vértice V.

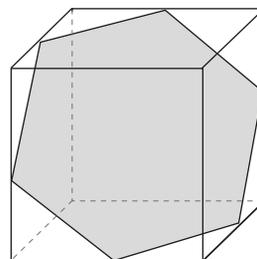


Os sete planos determinados são PL(ABCD), PL(VAB), PL(VBC), PL(VDC), PL(VDA), PL(VAC) e PL(VBD).

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 14

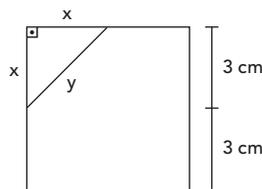
- 01** **F, V, V, F, V, F, V, V**
 (F) O ponto, a reta e o plano são exemplos de conceitos primitivos.
 (V)
 (V)
 (F) Por dois pontos **distintos**, passa uma única reta.
 (V)
 (F) Dois pontos **distintos** determinam uma única reta que passa por eles.
 (V)
 (V)

- 02** A interseção de um plano com uma face (quadrado) do cubo é um segmento. Assim, o polígono tem seis lados e é um hexágono. Veja.



Seja x cm a medida do lado do hexágono, tem-se o seguinte:

- I. Na face (quadrado) do cubo:

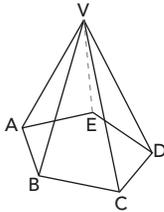


$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ cm} \\ y^2 &= 3^2 + 3^2 \\ y^2 &= 18 \\ y &= \sqrt{18} \\ y &= 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

- II. Perímetro do hexágono regular = $6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm.

03 Mesas com três pernas não balançam porque três pontos não colineares determinam um único plano (postulado da determinação de plano).

04 Pode-se imaginar uma pirâmide na qual a base é um pentágono regular, cujos vértices são os pontos A, B, C, D e E. O ponto V é o vértice da pirâmide (ponto fora do plano da base).

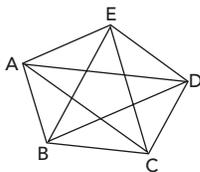


Assim, dentre esses seis pontos, não existem três alinhados; as retas determinadas por dois quaisquer desses pontos são distintas. São elas:

- As cinco retas que contêm as cinco "quinas" inclinadas (arestas laterais):

$$\overline{VA}, \overline{VB}, \overline{VC}, \overline{VD} \text{ e } \overline{VE}$$

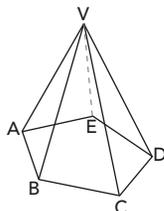
- As cinco retas que contêm os cinco lados do pentágono (arestas da base): $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ e \overline{EA} .
- As cinco retas que contêm as cinco diagonais do pentágono (diagonais da base): $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}$ e \overline{CE} .



Ao todo, são $5 + 5 + 5 = 15$ retas.

É possível, também, contar essas retas de outra maneira. Cada um dos seis pontos pode ser ligado a cinco pontos (cada um dos seis pontos determina cinco retas). Logo, $6 \cdot 5 = 30$ retas. Desse modo, cada reta foi contada duas vezes (a reta \overline{VA} , por exemplo, foi contada no ponto A e, novamente, no ponto V). Assim, o número correto de retas determinadas é $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

05 Pode-se imaginar uma pirâmide na qual a base é um pentágono regular, cujos vértices são os pontos A, B, C, D, E. O ponto V é o vértice da pirâmide (ponto fora do plano da base).



Assim, os cinco pontos coplanares A, B, C, D, E determinam um mesmo plano (o plano da base da pirâmide). Qualquer outro plano determinado deve conter o ponto V e dois pontos da base. São eles PL(VAB), PL(VAC), PL(VAD), PL(VAE), PL(VBC), PL(VBD), PL(VBE), PL(VCD), PL(VCE) e PL(VDE). Ao todo, tem-se $1 + 10 = 11$ planos determinados.

06 F, V, F, F, V, V

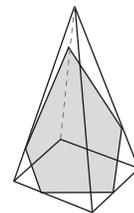
- (F) O paralelogramo é uma região limitada pelos lados. O plano é ilimitado.
- (V)
- (F) Três pontos determinam uma reta se estes estiverem alinhados.
- (F) Três pontos não alinhados determinam um plano.
- (V)
- (V)

07 V, V, F, V

- (V)
- (V)
- (F) Os pontos da diagonal pertencem ao quadrado, mas a reta que contém a diagonal tem pontos fora do quadrado.
- (V)

08 C

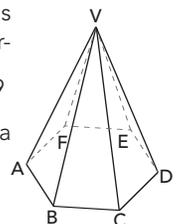
As faces da pirâmide são 4 triângulos e um quadrado (base). A interseção de um plano com cada uma das faces é um segmento de reta. Como o plano interceptará as cinco faces, o corte provocado pelo plano será um polígono de cinco lados (5 segmentos de reta).



O plano que contém o pentágono destacado (polígono de 5 lados) divide a pirâmide em duas partes. Considerando uma dessas partes, o pentágono destacado será uma de suas faces.

09 Cada um dos 8 vértices pode ser ligado aos 7 outros, determinando 7 retas. Seriam, portanto, $8 \cdot 7 = 56$ retas. No entanto, dessa maneira, cada reta foi contada duas vezes. Portanto, tem-se o número de retas $= \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

10 Tem-se o plano da base, os seis planos das faces laterais e mais os planos determinados por cada uma das $\frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$ diagonais do hexágono e o vértice V da pirâmide. Total $= 1 + 6 + 9 = 16$ planos.



ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 27

01 F, V, V, F, F

- (F) Os pontos podem ser alinhados.
- (V) Três pontos coincidentes estão em um plano; três pontos alinhados estão em uma reta, e essa reta está contida em um plano; três pontos não alinhados determinam um plano.
- (V) A reta só pode ser secante ao plano, contida no plano ou paralela a ele. A reta secante ao plano tem apenas um ponto em comum com o plano, e a paralela não contida no plano não tem nenhum ponto em comum. Sobrou apenas a reta contida no plano.
- (F) Pense em uma pirâmide de base triangular; existem quatro faces (quatro planos).
- (F) As retas \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} do enunciado da questão seguinte, por exemplo, são paralelas entre si; no entanto, não estão contidas todas em um mesmo plano.

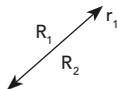
- 02 a) Retas \overline{HE} e \overline{GF} .
 b) Retas \overline{EF} e \overline{HG} .
 c) Plano (ABG).

Observação: podem ser escolhidas três quaisquer das quatro letras A, B, G, H, em qualquer ordem, para identificar o plano.

03 C

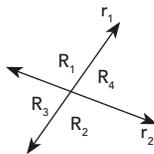
Seja a_n o número máximo de fatias obtidas com n cortes, note que

- um corte (reta r_1) dividirá o bolo em duas fatias (regiões R_1 e R_2);



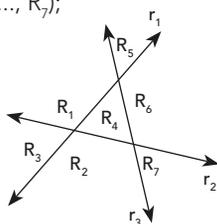
ou seja: $a_1 = 2$ regiões.

- dois cortes (retas r_1 e r_2) dividirão o bolo em quatro fatias (regiões R_1, R_2, R_3 e R_4);



ou seja, $a_2 = a_1 + 2$
 $a_2 = 2 + 2 = 4$ regiões.

- três cortes (retas r_1, r_2, r_3) dividirão o plano em sete regiões (R_1, R_2, \dots, R_7);



ou seja, $a_3 = a_2 + 3$
 $a_3 = 2 + 2 + 3 = 7$ regiões.
 Seguindo o padrão sugerido, tem-se:
 $a_4 = a_3 + 4$
 $a_4 = 2 + 2 + 3 + 4 = 11$ regiões.
 Desse modo, cinco cortes determinarão, no máximo:
 $a_5 = a_4 + 5$
 $a_5 = 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$ regiões (fatias).

- 04 O padrão da questão anterior sugere que o número de fatias obtidas (a_n) com n cortes pode ser dado por:

$$a_n = 2 + (2 + 3 + 4 + \dots + n)$$

Logo, pode-se dizer que:

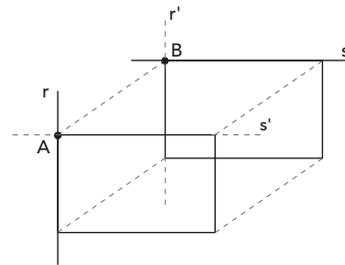
$$a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$$

$$a_n = 1 + \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

Logo, $a_{10} = 1 + \frac{(1+10) \times 10}{2} = 56$.

05 D

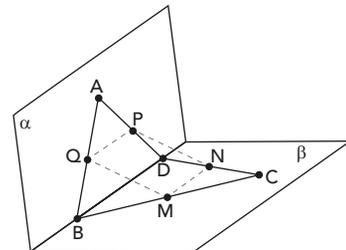
- I. (F) Duas retas paralelas e coplanares não são concorrentes.
- II. (F) Duas retas paralelas não têm ponto comum e não são reversas.
- III. (V) Considere a figura.



Sejam r e s duas retas reversas.

Tomando um ponto A da reta r , existe uma única perpendicular comum a r e s que intercepta a reta s no ponto B, de tal modo que $B \in r'$ e r'/r' . Analogamente, obtém-se a reta s'/s . Portanto, os planos $\alpha = (r, s')$ e $\beta = (r', s)$ são os únicos planos paralelos, cada um contendo uma das retas.

- IV. (V) Considere o quadrilátero reverso da figura, com $ABD \in \alpha$ e $BCD \in \beta$.



Como PQ é base média do triângulo ABD e MN é base média do triângulo BCD, segue que $PQ \parallel BD$ e $MN \parallel BD$. Logo, $PQ \parallel MN$. Similarmente, conclui-se que $MQ \parallel PN$ e, portanto, segue-se o resultado.

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 28

01 D

4 arestas (\overline{AB} , \overline{CD} , \overline{AE} e \overline{DH}).

Note que a aresta \overline{AD} não é reversa à reta r , pois existe o plano (ADFG) contendo \overline{AD} e r ($\overline{AD} \parallel r$).

02 A

Há eclipse com o alinhamento do Sol, da Terra e da Lua. Logo, as retas \overline{SL} e \overline{TL} são paralelas coincidentes.

03 Note o padrão seguinte, em que a_n indica o número máximo de regiões para n retas:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4 = 2 + 2$$

$$a_3 = 7 = 4 + 3 = 2 + 2 + 3$$

$$a_4 = 11 = 7 + 4 = 2 + 2 + 3 + 4$$

Seguindo o padrão, tem-se:

$$a_n = 2 + (2 + 3 + 4 + \dots + n)$$

$$a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$a_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\text{Então, } 211 = 1 + \frac{n+n^2}{2}$$

$$n^2 + n - 420 = 0$$

$$\Delta = 1 + 1680$$

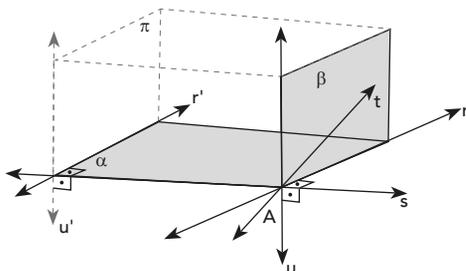
$$\Delta = 1681$$

$$n = \frac{-1 \pm 41}{2} \begin{cases} n = 20 \\ n = -21 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo, estão sendo consideradas 20 retas.

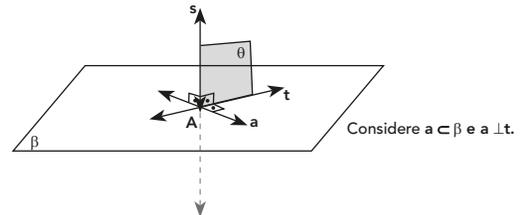
04 E

Para trabalhar com planos perpendiculares, nada melhor que o paralelepípedo retângulo (uma caixa de sapatos). Considere, então, a figura seguinte relativa ao enunciado, em que u é uma reta contida em β perpendicular à reta s , passando em A.



Analisando as afirmativas, tem-se o seguinte:

- I. (V) A reta s é perpendicular a duas retas concorrentes (r e u) do plano β , então s é perpendicular ao plano β .
- II. (V) A reta s é perpendicular ao plano β , então qualquer reta de β forma 90° com a reta s (qualquer reta de β é perpendicular ou ortogonal à reta s). Como a reta t contida em β é concorrente à reta s , t e s são retas perpendiculares.
- III. (V) A reta s é perpendicular ao plano β , então qualquer plano que contenha s é perpendicular a β .



Note que a medida do ângulo entre os planos β e θ é a medida do ângulo entre as retas a e s , isto é, $\beta \hat{=} \theta = a \hat{=} s = 90^\circ$.

- IV. (V) Veja, na figura, o plano π paralelo ao plano β .

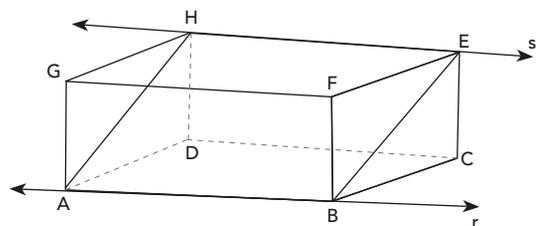
05 a) Se as retas r e s são paralelas distintas, existe um único plano passando por r e s . Então, $A \cap B$ é um conjunto unitário.

Se as retas são paralelas coincidentes, então:
 $A \cap B = A = B$

b) Se r e s são retas reversas, não existe um plano por elas. Logo, $A \cap B = \emptyset$.

06 C

Considere o paralelepípedo retângulo seguinte.



- I. (V) Observe os planos paralelos (ABCD) e (EFGH) interceptados pelo plano (ABEH); as interseções são as retas r e s . Note que r e s estão contidas no mesmo plano (ABEH) e $r \cap s = \emptyset$; r e s são paralelas.
- II. (F) Observe os planos paralelos (ABCD) e (EFGH). A reta \overline{EF} está contida no plano (EFGH), a reta $\overline{AB} = r$ está contida no plano (ABCD) e, no entanto, \overline{AB} e \overline{EF} são reversas.
- III. (F) Observe a reta \overline{GH} paralela aos planos (ABCD) e (BCEF); esses planos são secantes e não paralelos.
- IV. (V) Veja justificativa da afirmativa II.

07 B

O tetraedro (pirâmide de base triangular) tem 6 arestas. Considerando a aresta \overline{AD} , todas as outras arestas são concorrentes a \overline{AD} (têm um plano em comum), exceto a aresta \overline{BC} que é reversa a \overline{AD} . Tem-se, então, 3 pares de arestas reversas.

1ª par: \overline{AD} e \overline{BC}

2ª par: \overline{AC} e \overline{BD}

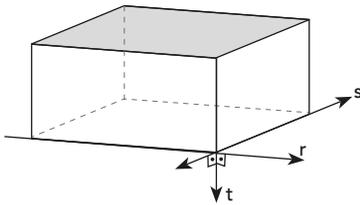
3ª par: \overline{AB} e \overline{CD}

Outra solução: o par \overline{BC} e \overline{AD} é o mesmo par \overline{AD} e \overline{BC} ; cada aresta apresenta apenas uma aresta reversa e são 6 arestas. São $6 \cdot 1 = 6$ pares, mas cada par foi contado duas vezes. Daí:

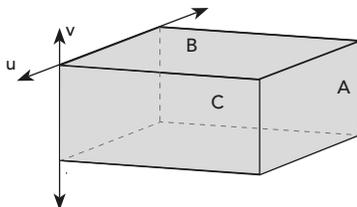
$$n^\circ \text{ de pares} = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$$

08 C

- a) (F) Se os 3 pontos forem alinhados, os planos que os contêm podem ser secantes.
- b) (F) Veja a figura do paralelepípedo seguinte. As retas r e s são perpendiculares a t e não são paralelas, mas concorrentes.



- c) (V) É um dos casos de determinação do plano.
- d) (F) Veja os planos A, B e C no paralelepípedo seguinte. Apesar de eles satisfazerem a condição, os planos A e B não são paralelos.



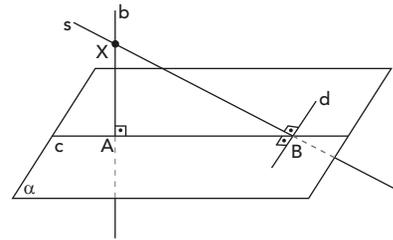
- C: plano da face frontal
- B: plano da face superior
- A: plano da face à direita

- e) (F) Veja as retas u e v paralelas ao plano A, na justificativa do item anterior.

09 F, F, F, F, V

- (F) r e s não têm ponto comum; então r e s podem ser reversas.
- (F) Duas retas paralelas distintas sempre determinam um plano.
- (F) Uma reta está contida em infinitos planos distintos.
- (F) Três pontos não colineares determinam um plano.
- (V)

10 D



Observe na figura que d é perpendicular ao plano (ABX); sai determinado pelas retas concorrentes b e c . Assim, d forma 90° com qualquer reta do plano (ABX), ou seja, d é perpendicular à reta s .