Resoluções

Capítulo 18

Binômio de Newton – Número binomial

ATIVIDADES PARA SALA

01 **B**

$$\binom{12}{3x-1}=\binom{12}{x+1}$$

Binomiais iguais $\Rightarrow 3x - 1 = x + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$
Binomiais complementares $\Rightarrow 3x - 1 + x + 1 = 12 \Rightarrow$
$4x = 12 \Rightarrow x = 3$
Logo, x = 1 ou x = 3.

02 **C**

A tabela apontada na questão é o Triângulo de Pascal. Portanto, $\binom{15}{13} = \dfrac{15!}{2! \cdot 13!} = \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

03 **C**

A soma dos coeficientes de P é dada por:
$P(1) = (1 + 1)^5 = 2^5 = 32$

04 **A**

Para o 4º termo do desenvolvimento de $(x^2 + x^{-1})^6$, tem-se:

$$p + 1 = 4 \Rightarrow p = 3$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot a^p \cdot x^{n-p}$$

$$T_{3+1} = \binom{6}{3} \cdot (x^{-1})^3 \cdot (x^2)^{6-3} = 20x^3$$

05 **B**

Qualquer termo do desenvolvimento do binômio será dado por: $\binom{10}{p} \cdot (x^3)^{10-p} \cdot (-x^{-2})^p = \binom{10}{p}(-1)^p \cdot x^{30-5p}$

Para que seja independente de **x**, deve-se ter x^0. Assim:

$x^{30-5p} = x^0 \Rightarrow 30 - 5p = 0 \Rightarrow p = 6$

Sendo p = 6:

$$\binom{10}{6}(-1)^6 \cdot x^{30-5\cdot 6} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 1 \cdot x^0 = \frac{10 \cdot \cancel{9}^3 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 210$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 A soma dos coeficientes é encontrada substituindo o valor numérico da variável por 1.

$(3 \cdot 1 + 1)^m = 2^{10} \Rightarrow 4^m = (2^2)^5 \Rightarrow 4^m = 4^5 \Rightarrow m = 5$

02 **C**

$2^n + 2^{n+1} \Rightarrow 2^n + 2^n \cdot 2 \Rightarrow 2^n \cdot (1 + 2) = 3 \cdot 2^n$

03 **C**

Sendo **k** $\in \mathbb{N}$ e $k \geq 3$, tem-se:

$$\frac{\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{3}}{\binom{k+2}{5}} = 1 \Rightarrow \frac{\binom{k+2}{3}}{\binom{k+2}{5}} = 1 \Rightarrow$$

$$\binom{k+2}{3} = \binom{k+2}{5}$$

Binomiais complementares: $3 + 5 = k + 2 \Rightarrow k = 6$

04 **V, V, F, V**

(V) A soma dos denominadores resulta no numerador (binômios complementares).

(V) $\binom{11}{x} - \binom{10}{3} = \binom{10}{2} \Rightarrow \binom{11}{x} = \binom{11}{3} \Rightarrow x = 3$ ou $x + 3 = 11 \Rightarrow x = 8$ e $8 + 3 = 11$.

(F) $\binom{10}{x} = \binom{10}{2x-4} \Rightarrow 2x - 4 = x$ ou $2x - 4 + x = 10 \Rightarrow$ $x = 4$ ou $x = \dfrac{14}{3}$ (não convém).

(V) Pela Relação de Stifel, $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$.

05 **B**

O termo geral do binômio é:

$$T_{p+1} = \binom{8}{p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{8-p} \cdot x^p = \frac{8!}{p! \cdot (8-p)!} \cdot 2^{8-p} \cdot x^{2p-8}$$

O termo independente de **x**, se existir, é o natural **p** que torna o expoente de **x** igual a zero, ou seja, $2p - 8 = 0 \Rightarrow$ $p = 4$.

Em consequência, o termo independente de **x** existe e é igual a $T_5 = \dfrac{8!}{4!\cdot(8-4)!}\cdot 2^{8-4} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 2^4 = 1120.$

Portanto, o resultado é 1 + 1 + 2 + 0 = 4.

06 **E**

$$\binom{7}{p}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{7-p}\cdot(x^3)^p = \binom{7}{p}\cdot 2^{7-p}\cdot x^{4p-7}$$

Como o expoente de **x** é 5, tem-se 4p – 7 = 5. Logo, p = 3.
Dessa forma, tem-se:

$$\binom{7}{3}\cdot 2^{7-3}\cdot x^{4\cdot 3-7} = 35\cdot 16\cdot x^5 = 560x^5.$$

Logo, o coeficiente pedido é 560.

07 **C**

O termo geral do Binômio de Newton será dado por:

$$\binom{12}{p}x^{12-p}\cdot(x^{-3})^p = \binom{12}{p}\cdot x^{12-4p}$$

Para que T seja o termo independente do desenvolvimento de $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$, deve-se admitir $12 - 4p = 0 \Rightarrow p = 3$

Logo, $T = \dbinom{12}{3} = \dfrac{12!}{3!9!} = 220.$

08 **E**

$$\binom{15}{p}\cdot(x^2)^p\cdot(xy)^{15-p} = \binom{15}{p}\cdot x^{2p}\cdot x^{15-p}\cdot y^{15-p} = \binom{15}{p}\cdot x^{p+15}\cdot y^{15-p}$$

Como o grau de x é 21, tem-se $x^{p+15} = x^{21}$.
Logo, $p + 15 = 21 \Rightarrow p = 6$.
Assim, tem-se $\dbinom{15}{6}\cdot x^{21}\cdot y^9 = 5005x^{21}y^9$

09 **D**

$$(2x-1)^8 = \binom{8}{0}\cdot(2x)^8\cdot(-1)^0 + \binom{8}{1}\cdot(2x)^7\cdot(-1)^1 +$$
$$+\underbrace{\binom{8}{2}\cdot(2x)^6\cdot(-1)^2}_{3^{\text{o}}\text{ termo}} + \underbrace{\binom{8}{3}\cdot(2x)^5\cdot(-1)^3}_{4^{\text{o}}\text{ termo}} + \ldots$$

3º termo $= 28\cdot 64x^6\cdot(1) = 1792x^6$
4º termo $= 56\cdot 32x^5\cdot(-1) = -1792x^5$

Quociente pedido $= -\dfrac{1792x^5}{1792x^6} = -\dfrac{1}{x}$

10 a) $$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4\frac{1}{\sqrt{x}} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 +$$
$$+\binom{5}{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \binom{5}{4}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$$
$$= \frac{1}{x^{10}} + \frac{5}{x^8\sqrt{x}} + \frac{10}{x^7} + \frac{10}{x^5\sqrt{x}} + \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

b) $$T_8 = \binom{12}{7}\left(\frac{1}{x^2}\right)^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 = \frac{12!}{7!\,5!}\cdot\frac{1}{x^{10}}\cdot\frac{1}{x^3\sqrt{x}} = \frac{792}{x^{13}\sqrt{x}}$$